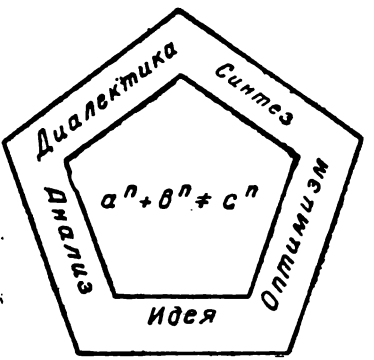
ВИКТОЛИЙ БУДКИН

МЕТОДИКА ПОЗНАНИЯ «ИСТИНЫ»

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА



ЯРОСЛАВЛЬ 1975

ОТ АВТОРА

Пьер де Ферма, юрист и великий французский математик, задал трудную задачу последующим поколениям математиков-профессионалов и любителей. Она получила название Великой теоремы Ферма.

На примере ее решения читатели, люди, посвятившие себя профессии исследователя, могут узнать то, что так не достает неопытному, начинающему исследователю. Он может в деталях ознакомиться с методикой решения задач, проблем, с тем, чему его никогда и нигде не учили, что обычно приобретается после нескольких десятков лет самостоятельного упорного труда.

Тот, кто в деталях понимает значение методики познания и умело ее применяет, может при средних интеллектуальных способностях решить задачу любой сложности. Все без исключения проблемы, за которые он берется, оказываются, в конце концов, разрешенными. Тот же, кто обладает энциклопедическими знаниями, имеет прекрасные способности, но не придерживается при работе методических правил и убеждений, самостоятельно не может разрешать не только проблемные вопросы, но и довольно элементарные задачи. Такие исследователи с должной отдачей самостоятельно работать не могут: им необходим опытный руководитель.

Значение методического подхода так велико, что над этим стоит задуматься каждому молодому исследователю. Он должен с самого начала трудовой деятельности не жалеть ни времени, ни сил на отработку методики познания, так как потом результаты оказываются настолько заметными и ощутимыми для него самого, что он с этих пор будет удовлетворяться не столько разрешением проблемных вопросов и задач, сколько творческими находками по совершенствованию своей методики познания.

Выражаю благодарность товарищам по работе; кандидату технических наук Б. К. Басову и инженерам-исследователям Э. Л. Антонову и В. Н. Семенову за просмотр и рецензирование рукописи моей книги, за дружеские критические замечания.

© Верхне-Волжское книжное издательство, 1975.

Д-75
14685
75-32779Q
ГОС. ПУБЛИЧНАЯ
Н... О-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА СССР

ГЛАВА ПЕРВАЯ

МЕТОДИКА ПОЗНАНИЯ «ИСТИНЫ»

Сменилось 13 поколений людей с тех пор, как была сформулирована Великая теорема Ферма.

Ее решение в общем виде, впервые приведенное в настоящей книге, показывает, насколько были бесплодны споры знаменитых математиков и философов о преимуществах тех или иных разделов математики перед другими разделами; например, алгебры или аналитической геометрии перед классической геометрией и наоборот.

Действительно, можно говорить о сильной и слабой, о положительной и отрицательной сторонах того или иного раздела математики, но только применительно к решению какой-то конкретной задачи, так как при решении задачи другого характера сильная сторона раздела часто становится слабой, а положительная — отрицательной. Таким образом, понятие о преимущественном положении того или иного раздела математики перед другими является понятием относительным.

Исследователи, изобретатели, инженеры и ученые, решающие сложные научные и технические проблемы и часто обращающиеся к логике математической обработки, постоянно должны помнить об ограниченности отдельных разделов математики. Исследователям приходится встречаться с решением таких задач, которые могут быть решены только при совокупном использовании нескольких разделов математики. К их типу задач принадлежит и Великая теорема Ферма.

Таким образом, различные разделы и ветви математики в отдельности одновременно хороши и плохи. Хороши они для решения одних задач, плохи для решения других и совершенно не пригодны в отдельности для решения вопросов, требующих комплексного подхода. В этом заключается сущность диалектического подхода к решению конкретной задачи, проблемы.

Проведем аналогию математики с техникой, например, с методами анализа продуктов. Нельзя вообще сказать, что тот или иной вид анализа лучше другого. Так, для анализа одного материала или состава, например, лучшим является газожидкостной хроматографический метод, а для анализа другого продукта лучшим является химический метод анализа. А третий продукт можно проанализировать только путем применения всех известных методов анализа. Проводя аналогию и далее, то же можно сказать вообще о всех разделах техники и науки, как разработанных, так еще не разработанных.

Итак, все разделы и ветви математики, техники и других наук хороши, лучших и худших среди них нет. Но при решении ряда задач необходимо прибегнуть к помощи, или как к инструменту познания, одновременно к нескольким разделам и ветвям техники, математики и других наук. А чтобы сделать это, надо найти связь между этими разделами применительно к условию конкретно решаемой задачи, проблемы. В этом основа вопроса. Здесь прежде всего должна проявляться изобретательность инженера и ученого при решении конкретно поставленной задачи.

Но для решения сложных задач, проблем и этого не достаточно. Прекрасное знание необходимых разделов математики, физики, химии в сочетании с глубоким знанием специальных предметов и уменье найти связь между различными разделами и науками применительно к конкретно решаемой задаче, проблеме еще не определяет успеха. Требуются дополнительные знания и соблюдение дополнительных требований и условий, которые, казалось бы, ничего нового не представляют и давно известны. Но только тот, кто их прочувствовал до конца и неукоснительно соблюдает эти условия, может иметь успех при решении таких сложных задач и проблем, которые оказались неразрешимыми для многих других исследователей.

В этой главе не рассматриваются природные способности мышления, воображение, фантазия, память и другие способности личности, так как автор считает, что эти способности не являются определяющими для решения сложной задачи, проблемы, когда время для ее решения не ограничивается. Не рассматривается здесь и эвристи-

ческий вопрос механизма возникновения идей и нахождения связи между различными разделами и областями науки, так как он достаточно полно изложен как в научно-популярной, так и специальной литературе [1—4].

Для нас важно только, да или нет. Способен ли в принципе человек средних способностей решить сложную задачу, проблему? На этот вопрос можно ответить положительно. А если способен, то какими качествами, какими приемами, «инструментом» он должен владеть? Прежде всего, должен быть **неиссякаемым оптимистом**, без конца верить, что задача разрешима, только он пока еще не знает решения, но в конечном итоге в различных вариантах будет, наконец, найдено ее решение.

Профессионально неиссякаемым оптимизмом обладают самостоятельно и продолжительно работающие исследователи в любой области. Они постоянно, изо дня в день, в течение десятков лет, встречаются с нерешенными вопросами и решают их. У них вырабатывается неиссякаемый оптимизм, без которого даже подготовку к сложному эксперименту не удается довести до конца.

Не найдя в течение продолжительного времени правильного решения, исследователю часто кажется, что трудится он напрасно и единственной движущей силой его работы является моральное удовлетворение от очередной возникшей идеи или частично решенных вопросов и понимание того, что им вносится посильный вклад в развитие науки и техники, что он сумеет, наконец, выполнить необходимую работу. Нужно сказать, что внешнее впечатление исследователя обманчиво. Постоянно решая сложные задачи, проблемы, исследователь значительно обогащает себя интеллектуальным опытом. Он лучше познает «кухню», подход, методику решения сложного технического или научного вопроса. Дополнительно изучая литературу по теории познания, исследователь имеет возможность сравнить свои приемы и методы с известными из литературы и, в конце-концов ,на решениях конкретных сложных задач и проблем, оттчить доступные ему «инструменты и орудия» научного познания «истины».

Вторым непременным условием предлагаемой методики решения любых сложных задач является **умение ценить идеи**, позволяющие на новых принципах приступить к решению задачи, к исследованию поставленного вопроса.

Дело в том, что под влиянием исторически сложившихся условий и тенденций, традиционного воспитания и обучения, в каждом из нас относительно сильно развиты способности анализа и относительно слабо развиты способности синтеза; относительно сильно развиты способности критики и самокритики и относительно слабо развиты способности создавать новое, творить. В подавляющем большинстве случаев, при неправильном подходе к решению проблемных вопросов, возникшая под влиянием творческих усилий плодотворная идея, еще не будучи подвергнута детальной и квалифицированной проверке на решении конкретно поставленной проблемы, подсознательно, под влиянием сильно развитой способности личности к критическому анализу, автоматически отклоняется. Начинается поиск новой идеи. При этом исследователь, под влиянием той же сильно развитой способности личности к критическому анализу, постоянно держит в памяти все старые идеи и уверенно считает, что они детально проверены и нет смысла к их возврату и повторной проверке. Вот так, под действием чисто психологических причин, теряются ценные идеи, а исследовательно, и решения сложных задач и проблем.

Умение исследователя ценить идеи должно заключаться в том, что всякую возникшую или заимствованную идею нужно сформулировать письменно, пусть на первых порах недостаточно точно и, если возможно, математически, на конкретно решаемой задаче, подвергнуть эту идею строгой логической проверке. Даже в том случае, когда после продолжительной работы исследователь убедится в неплодотворности возникшей идеи применительно к решению поставленной задачи, усилия исследователя оправданы, так как он обогатится новыми знаниями и лично выстраданным интеллектуальным опытом, который в значительной степени повышает творческие способности личности, способности не только к анализу, но, главное, и к синтезу. А развить способности к синтезу можно только практически, при решении конкретных сложных задач и проблем.

Итак, только подвергнув строгой логике математики, если это возможно, и убедившись в неплодотворности идеи применительно к решению поставленной задачи, можно от этой идеи отказаться окончательно.

Возможны, и часто бывают весьма плодотворны, слу-

чаи одновременной работы над несколькими идеями применительно к решению одной и той же сложной задачи. Но и здесь от какой-либо идеи окончательно можно отказаться только тогда, когда неоднократный эксперимент или проверка от обратного, или лучше всего (если это возможно) неоднократная строгая математическая проверка, неоспоримо свидетельствует о неплодотворности той или иной идеи.

И последнее условие, которое следует соблюдать исследователю. Он должен исходить из того, что еще окончательно не выработал в себе способность к решению сложных комплексных задач, требующих для своего решения одновременного установления взаимосвязи очень многих различных по природе факторов и понятий. Поэтому решение любой сложной задачи надо расчленять на главы, главы — на разделы, разделы — на параграфы. Только разбив решение задачи, проблемы на очень мелкие части, легко решаемые людьми средних способностей, и педантично их разрешая, опять-таки не считаясь с затраченным временем и часто сводя решение одной части, одного случая к другому случаю, уже решенному, удается постепенно решить всю проблему в целом.

Обращаясь к истории, к творчеству Исаака Ньютона (1642—1727) нельзя не удивляться его научным достижениям. Однако известно, что в детстве Ньютон был болезненным ребенком; в первые годы пребывания в школе не проявлял особых успехов в учебе. Позже, когда Ньютон сделал свои открытия и достиг вершины славы, его спрашивали, каким путем он пришел к этим открытиям, он отвечал: «...Всегда думал о них. Предмет исследования постоянно передо мной, и я жду, пока первые пробивающиеся лучи рассвета постепенно не осветят его сильным и ярким светом». Еще одно из изречений приписывают Ньютону: «Если я видел дальше, чем другие, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов». Несомненно, что к этим гигантам Ньютон относил Николая Коперника (1473—1543), Тихо Браге (1546—1601), Иоганна Кеплера (1571—1630), Галилео Галилея (1564—1642), Рене Декарта (1596—1650), Френсиса Бэкона (1561—1626), Пьера де-Ферма (1601—1665), Эванджелиста Торричелли (1608—1647) и Блэза Паскаля (1623—1662).

Но Ньютон весьма критически относился к научным достижениям и принципам этих ученых. Например, из учения Рене Декарта и Френсиса Бэкона он взял «на вооружение» только положительные стороны их учения и создал свой оригинальный научный метод познания, который впоследствии корнями врос в науку и имеет немалое значение и оказывает существенное влияние на развитие науки и техники и в настоящее время. Метод научного познания, разработанный Ньютоном, настолько является мощным и действенным инструментом познания «истины» и общим по характеру заложенных в него принципов, что часто до настоящего времени путают, и одни его называют индуктивным, другие — дедуктивным. В действительности метод Ньютона является одновременно и тем и другим. Индуктивным он является в части поиска и зарождения идеи, а в части проверки идеи, вывода общего закона на основе этой идеи и широкого распространения выведенного закона на конкретные частные случаи и явления природы, является дедуктивным.

Ньютон повторяет Бэкона, утверждая, что единственным источником и надежным гарантом научного знания является чувственный опыт. Несомненно, что Ньютон добился огромных творческих успехов в научной деятельности не только благодаря своей одаренности, но главное, своей методики познания, которой он был верен и постоянно ее отстаивал, критикуя другие эвристические теории и направления, в частности Декарта и особенно картезианцев.

Если принять во внимание, что рассматриваемая во второй главе этой книги Великая теорема Ферма была сформулирована еще до рождения Ньютона и вскоре после опубликования привлекла внимание математиков, но трудно предположить, что Ньютон не работал над ее доказательством. Ньютон не любил опубликовывать свои работы. Поэтому до настоящего времени не известно, решил ли он теорему. Современникам он не заявлял об этом. В записках и письмах, оставшихся после смерти Ньютона и его современников, с которыми он вел переписку, также не было обнаружено сведений о решении Великой теоремы Ферма.

Процессуальная схема предлагаемой методики познания «истины», решения сложных задач, проблем упрощенно выглядит так: диалектика⟶синтез⟶опти-

мизм → идея → анализ (рис. 1). И далее все повторяется до тех пор, пока окончательно, во всех деталях, не будет решена конкретно поставленная задача, проблема.

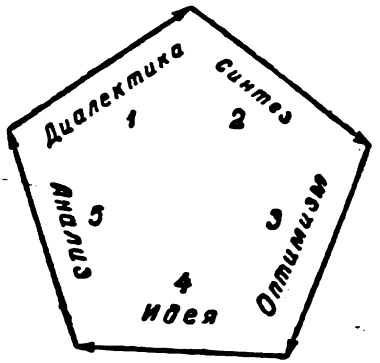


Рис. 1.
Схема методики.

Из описания и приведенной схемы не представляет большого труда заметить, что рассматриваемая методика познания «истины», решения сложных задач и проблем является составной частью и частным случаем применения марксистского диалектического метода.

Заказ 1630

ГЛАВА ВТОРАЯ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА

ВВЕДЕНИЕ

В замечании, расположенном на полях «Арифметики» греческого математика Диофанта (около 300 г. н. э.) против задачи Диофанта о разложении данного квадрата на два квадрата, выдающийся французский математик Пьер де Ферма (1601—1665) записал: «Однако куб на два куба или квадратоквадрат на два квадратоквадрата и вообще никакую до бесконечности степень после (сверх) квадрата на две того же наименования разложить невозможно» [5].

«До сих пор никому еще не удалось полностью доказать эту теорему, поэтому правильно было бы говорить о проблеме Ферма», — писал в своей книге «Теорема Пифагора» немецкий ученый, профессор математики Геттингенского университета Вальтер Литцман [6]. То же отмечал и известный советский математик А. Я. Хинчин [7].

Задача, сформулированная Пьером де Ферма, известна как Великая Теорема Ферма

$$a^n + b^n \neq c^n$$

Простая на вид запись теоремы привлекла внимание как математиков-профессионалов, так и математиков-любителей.

Однако сменилось четыре поколения людей, а теорема «стояла как совершенно неприступная крепость». Лишь Эйлеру (1707—1783) удалось сделать первую, правда небольшую, брешь. Он доказал ее справедливость для $n=3$ и $n=4$. Следующее удачное наступление предпринял Дирихле (1805—1859), «взявший» $n=5$ и $n=14$; Ламе (1795—1870) — $n=7$ и, наконец, Куммер (1810—1893), посвятивший теореме несколько десятков лет, доказал ее для большого числа значений n» [5].

Для этого Куммер вынужден был разработать специальный метод алгебраической теории чисел, впослед-

ствии развитый Давидом Гильбертом (1862—1943), Фуртвенглером и затем целой группой математиков. Существенного успеха в решении задачи Ферма добился математик Виферих, опубликовавший на эту тему специальную работу.

Благодаря усилиям всех названных и многих неназванных математиков к 1970 г. были известны частные решения теоремы Ферма в целых числах для $n \leqq 2521$ [3].

И только в настоящей работе впервые приводится полное доказательство Великой теоремы Ферма в общем виде, которое, вероятно, и имел в виду 334 г. тому назад великий французский математик Пьер де Ферма, когда сделал замечания на полях «Арифметики» Диофанта: «Я открыл поистине чудесное доказательство этого дела». Прекрасно. Что же мешает автору поделиться с нами?» [5]. Оказывается, недостаточная ширина полей книги, на которых он делал замечания.

Итак, доказательство Пьер де Ферма не привел. Это доказательство математики-профессионалы и математики-любители искали 300 с лишним лет и не могли найти.

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ПРИНЦИПЫ

Великую теорему Ферма можно записать в виде неравенства

$$a_1^n + b_1^n \neq c_1^n, \quad \text{где} \qquad (1)$$

a_1, b_1, c_1 — целые положительные числа,

n — целое положительное число, большее двух.

В настоящей работе впервые приводится полное доказательство Великой Теоремы Ферма в общем виде, т. е. приводится доказательство неравенства (I).

Предположим, что Пьер де Ферма ошибся и для какого-то сочетания целых чисел a_1, b_1, c_1 и n существует уравнение

$$a_1^n + b_1^n = c_1^n \qquad (2)$$

Чтобы доказать возможность существования уравнения (2), следует исследовать бесконечное множество комбинаций целых чисел a_1, b_1, c_1 и n, в которых значения a_1, b_1, c_1 были бы целыми положительными числами, изменяющимися от 1 до ∞, а n — целым положительным числом, изменяющимся от 3 до ∞.

Так как a_1, b_1, c_1 и n — целые положительные числа, то значения a_1^n, b_1^n и c_1^n уравнения (2) также представляют собой целые числа. И уравнение (2) можно записать в виде уравнения

$$A+B=C, \tag{3}$$

где A, B и C — целые положительные числа.

Уравнение (3) можно записать и так:

$$(\sqrt[n]{A})^n+(\sqrt[n]{B})^n=(\sqrt[n]{C})^n\ , \tag{4}$$

где $\sqrt[n]{A}=a_1$, $\sqrt[n]{B}=b_1$ и $\sqrt[n]{C}=c_1$

Чтобы доказать возможность существования уравнения (2), следует доказать возможность уравнений (3) и (4), при исследовании которых значения их членов A, B и C, изменяясь, охватывали бы всю числовую ось целых положительных чисел от 1 до ∞ и значения корней

$$\sqrt[n]{A},\ \sqrt[n]{B} \text{ и } \sqrt[n]{C}$$

представляли бы целые положительные числа. При этом значение n целого положительного числа должно изменяться от 3 до ∞.

Вглядываясь внимательно в алгебраическое уравнение (3), нетрудно установить связь этого алгебраического уравнения с геометрией, которая позволяет геометрически интерпретировать это уравнение.

В самом деле, если уравнение (3) записать в виде уравнения

$$(\sqrt{A})^2+(\sqrt{C})^2=(\sqrt{C})^2 \tag{5}$$

и алгебраические выражения $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ и $\sqrt{C}$ соответственно заменить на геометрические отрезки a, b и c, т. е.

$$\sqrt{A}=a \tag{6}$$

$$\sqrt{B}=b \tag{7}$$

$$\sqrt{C}=c, \tag{8}$$

то уравнение (3), а следовательно, и уравнение (5) можно представить геометрически в виде прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 2), у которого катеты BC и CA имеют длины a и b, а гипотенуза AB имеет длину c.

Одновременное решение уравнения (2) и рассмотрение прямоугольного треугольника ABC позволяет не только решение алгебраической задачи свести к решению геометрической задачи, а главное иметь возможность использовать все в совокупности знания, выработанные человечеством в области арифметики, алгебры, теории чисел, геометрии, аналитической геометрии и тригонометрии, для решения Великой теоремы Ферма.

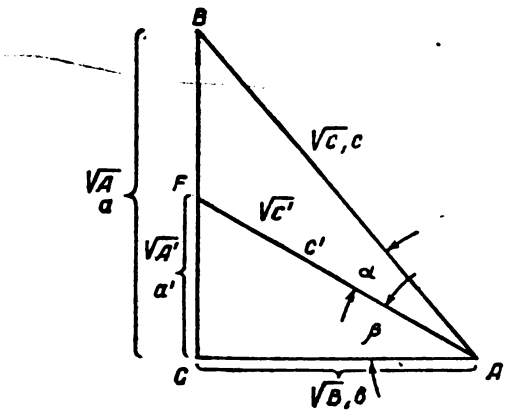


Рис. 2.
Геометрическая иллюстрация уравнения

$$(\sqrt{A})^2 + (\sqrt{B})^2 = (\sqrt{C})^2$$

и проведения медианы AF

При доказательстве теоремы Ферма принимаются во внимание или непосредственно используются следующие исходные положения и принципы.

Принцип 1.

Если в уравнении (3), (4) или (5) в правой его части число C нечетное, то в левой части уравнения либо A нечетное число, а B четное, либо B нечетное число, а A — четное. Одновременно числа A и B нечетными быть не могут, так как при нечетности чисел A и B сумма их, равная C, должна получиться четной, а по условию она нечетна.

Принцип 2.

Если в уравнении (3), (4), (5) в правой его части чис-

ло C четное, то в левой его части оба числа A и B являются нечетными.

Принцип 3.

Если в уравнении (3), (4), (5) все члены являются четными числами, то деля каждый член уравнения на наибольший общий четный делитель, уравнение упрощается и сводится к уравнениям принципа 1 или 2.

Принцип 4.

Умножение каждого члена уравнений (3), (4) и (5) на k, где k — действительное положительное число, приводит к получению, соответственно, уравнений

$$kA + kB = kC, \tag{9}$$

$$(\sqrt[n]{kA})^n + (\sqrt[n]{kB})^n = (\sqrt[n]{kC})^n, \tag{10}$$

$$(\sqrt{kA})^2 + (\sqrt{kB})^2 = (\sqrt{kC})^2 \tag{11}$$

В геометрической интерпретации такое умножение равносильно получению из прямоугольного треугольника ABC (рис. 2) новых прямоугольных треугольников со сторонами, в $\sqrt{k}$ раз большими и подобных треугольнику ABC.

Принцип 5.

В соответствии с литературными данными, например, книгой известного американского математика, специализирующего в области теории чисел, профессора университета штата Орегон Айвена Нивена «Числа рациональные и иррациональные» [8], известна и доказана следующая теорема: «Пусть α — произвольное иррациональное число и z — любое рациональное число, отличное от нуля. Тогда сложение, вычитание, умножение и деление, примененные к числам α и z, приводят к иррациональным числам. Кроме того, числа $-\alpha$, α^{-1} иррациональны» [8].

Принцип 6.

В принципе 6 дадим основные признаки, по которым сразу же можно определить, равны ли два произведения нескольких целых чисел или нет.

В общем виде запишем равенство

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_4 \cdot a_5, \tag{12}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — целые положительные числа.

Поскольку левая часть уравнения (12), состоящая из произведения целых положительных чисел $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$, равна правой части этого уравнения, состоящей из произведения двух чисел $a_4 \cdot a_5$, то очевидно, что значение по крайней мере одного числа из двух, a_4 или a_5, не равно ни одному из трех чисел a_1, a_2, a_3. Однако найдя произведение чисел $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ в левой части уравнения (12), равное значению целого числа A, можно написать

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = A \qquad (13)$$

На основании уравнений (12) и (13) имеем возможность и произведение чисел правой части уравнения (12) $a_4 \cdot a_5$ приравнять тому же значению числа A, т. е.

$$a_4 \cdot a_5 = A \qquad (14)$$

Таким образом, уравнение (12) преобразуется в уравнение

$$A = A \qquad (15)$$

Разложим значение целого числа A на простые числа и представим в виде произведения простых чисел, получим

$$A = b_1^{m_1} \cdot b_2^{m_2} \cdot b_3^{m_3} \cdot b_4^{m_4}, \qquad (16)$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 — простые числа,

m_1, m_2, m_3, m_4 — показатели степени простых чисел, целые положительные числа.

На основании уравнений (12—16), уравнение (12) можно записать в виде

$$b_1^{m_1} \cdot b_2^{m_2} \cdot b_3^{m_3} \cdot b_4^{m_4} = b_1^{m_1} \cdot b_2^{m_2} \cdot b_3^{m_3} \cdot b_4^{m_4} \qquad (17)$$

Вглядываясь в уравнение (17), не представляет большого труда увидеть, что все простые числа, имеющиеся в левой части уравнения и записанные в виде произведения, имеются и в правой части уравнения. То же можно сказать и относительно показателей степени m_1, m_2, m_3 и m_4.

Таким образом, признаками равенства двух сравниваемых произведений целых чисел, например, назовем условно, первого произведения и второго произведения, является:

1) наличие во втором произведении всех простых чи-

сел-сомножителей, полученных от разложения всех сомножителей второго произведения, которые имеются в первом произведении и получены также путем разложения всех сомножителей первого произведения на простые числа, т. е., если во втором произведении имеются простые числа-сомножители b_1, b_2, b_3 и b_4, то они должны быть в наличии и в первом произведении;

2) показатели степеней простых чисел как первого, так и второго произведения должны быть при каждом простом числе одни и те же, т. е. m_1, m_2, m_3 и m_4, соответственно при b_1, b_2, b_3 и b_4 первого и второго произведений.

Если хотя бы один из этих двух признаков не соблюдается, между первым и вторым произведением смело можно ставить знак неравенства, так как в этом случае эти произведения не могут соответствовать членам уравнений (15) и (17).

Приведем дополнительные обоснования справедливости сделанного вывода.

Известно, что дробь $\frac{a}{b}$, где

a, b — разные простые числа, равна другой дроби $\frac{a_1}{b_1}$, где a_1 и b_1 — отличные от a и b целые положительные числа, в том случае, когда a_1 и b_1 соответственно больше a и b в одно и то же число раз k, где k — целое положительное число, или, другими словами, когда a_1 и b_1 являются не простыми числами, а составными:

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = \frac{a_1}{t_1} \qquad (18)$$

Очевидно, что уравнение (18) имеет место, когда

$$a_1 = ak \qquad (19)$$

$$b_1 = bk \qquad (20)$$

Действительно, вглядываясь в уравнения (19) и (20), видим, что числа a_1 и b_1 являются составными.

Следовательно, дроби, у которых числители и знаменатели представляют собой разные простые числа (а не составные), никогда не равны друг другу

$$\frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}, \qquad (21)$$

где a_2, b_2, a_3, b_3 — разные простые числа.

Из неравенства (21) можно сделать вывод, что и произведения, у которых все сомножители представляют простые числа, никогда не равны друг другу, т. е.

$$a_2 \cdot b_3 \neq b_2 \cdot a_3 \qquad (22)$$

Принцип 7.

Любое простое число в степени, представляющей собою не сокращающуюся до целого числа дробь, является иррациональным числом.

Приведем доказательство.

Идея доказательства сводится к тому, что все действительные числа делятся на рациональные и иррациональные, и если доказать, что рассматриваемое действительное число не является рациональным, то, следовательно, оно является иррациональным числом. То же самое следует и из определения иррационального числа. «Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными числами» [9].

Пусть b — простое число, например, 2, 3, 5, 7 и т. д. $\frac{m}{n}$ —показатель степени числа b, не сокращающаяся до целого числа дробь.

Приведем доказательство, что выражение $b^{\frac{m}{n}}$ представляет собой иррациональное число.

Значение $b^{\frac{m}{n}}$ можно записать

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m} \qquad (23)$$

При доказательстве возможны два случая: 1) когда $m > n$, 2) когда $n > m$.

Так как оба случая доказываются совершенно аналогично, то разберем подробно только один случай, когда $n > m$.

Предположим, что выражение $\sqrt{b^m}$ представляет собой какое-то рациональное число. А любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$.

При этом возможны три подслучая:

1) $\frac{p}{q}$, где ни число p, ни число q, будучи разложен-

ГОС. ПУБЛИЧНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА СССР

ными на простые числа, не имеют в своем составе в качестве сомножителя простого числа b;

2) $\frac{p}{q_1}$, где число p, будучи разложенным на простые числа-сомножители, не имеет в своем составе в качестве сомножителя простое число b;

q_1 — число, которое будучи разложенным на простые числа-сомножители, имеет в своем составе в качестве сомножителя простое число b;

3) $\frac{p_1}{q}$, где число p_1, будучи разложенным на простые числа-сомножители, имеет в своем составе в качестве сомножителя простое число b, а число q — не имеет.

Четвертый случай, когда p и q, будучи разложенными на простые числа-сомножители, оба имеют в своем составе в качестве сомножителя простое число b, не рассматривается, так как после деления числителя и знаменателя дроби на наибольший общий делитель, четвертый случай сводится к одному из трех, перечисленных выше.

Разберем по порядку каждый случай.

1) $$\frac{p}{q} = \sqrt[n]{b^m} \tag{24}$$

$$\frac{p^n}{q^n} = b^m \tag{25}$$

или

$$q^n \cdot b^m = p^n \tag{26}$$

Так как в уравнении (26) левая его часть содержит в качестве сомножителя простое число b, а правая часть — не содержит по условию, то, на основании принципа 6, уравнение (26) в действительности не может иметь места, когда выражение $\sqrt[n]{b^m}$ является рациональным числом и равно выражению $\frac{p}{q_1}$.

2) $$\frac{p}{q_1} = \sqrt[n]{b^m} \tag{27}$$

$$\frac{p^n}{q_1^n} = w^m \tag{28}$$

$$q_1^n \cdot b^m = p^n \tag{29}$$

Так как в уравнении (29) левая его часть содержит в качестве сомножителя простое число b, а правая часть

этого уравнения простое число b не содержит по условию, то, на основании принципа 6, уравнение (29) в действительности не может иметь места, когда выражение $\sqrt[n]{b^m}$ является рациональным числом и равно выражению $\frac{p}{q_1}$.

$$3) \quad \frac{p_1}{q} = \sqrt[n]{b^m} \tag{30}$$

Так как по условию в уравнении (30) число p_1, которое, будучи разложенным на простые числа-сомножители, имеет в своем составе в качестве сомножителя хотя бы одно (когда не одно простое число b — доказательство аналогично) простое число b.

Тогда

$$p_1 = p \cdot b \tag{31}$$

где p — целое число, которое, будучи разложенным на простые числа-сомножители, не имеет в своем составе в качестве сомножителя число b.

Уравнение (30) с учетом уравнения (31) запишется или

$$\frac{pb}{q} = \sqrt[n]{b^m} \tag{32}$$

или

$$\frac{p^n \cdot b^n}{q^n} = b^m \tag{33}$$

или

$$\frac{p^n \cdot b^n}{q^n \cdot b^m} = 1 \tag{34}$$

Так как $n > m$ по условию, то уравнение (34) после сокращения примет вид

$$\frac{p^n \cdot b^{n-m}}{q^n} = 1 \tag{35}$$

или

$$p^n \cdot b^{n-m} = q^n \tag{36}$$

Так как в уравнении (36) левая его часть содержит в качестве сомножителя простое число b, а правая часть этого уравнения не содержит простое число b по условию, то, на основании принципа 6, уравнение (36) в действительности не может иметь места, когда выражение $\sqrt[n]{b^m}$ является рациональным числом и равно выражению $\frac{p_1}{q}$.

Три разобранных подслучая охватывают все возможные варианты изменений рационального числа $\frac{p}{q}$. Поскольку в любом возможном случае выражение $\sqrt[n]{b^m}$, представляющее собой действительное число, не может быть рациональным числом, следовательно, это выражение $\sqrt[n]{b^m}$ является иррациональным числом.

Принцип 8.

Любое составное положительное рациональное число в степени, представляющей собой не сокращающуюся до целого числа дробь, является иррациональным числом в том случае, когда числитель и знаменатель рационального числа, будучи разложенными на простые числа-сомножители, имеют в своем составе хотя бы одно простое число в степени в виде дроби, не сокращающейся до целого числа.

Легко видеть, что принцип 8 является следствием принципа 7 и принципа 5.

Принцип 9.

Выражения $\sqrt[n]{4}$, $\sqrt[n]{2}$, $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ и $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$,

где n — целое положительное число, большее 2, являются иррациональными числами.

Так как
$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[n]{4}}, \tag{37}$$

а
$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, \quad \text{то} \tag{38}$$

в соответствии с принципом 5 задача сводится к доказательству иррациональности выражений $\sqrt[n]{4}$, $\sqrt[n]{2}$. Иррациональность же последних выражений вытекает из принципа 7.

Можно привести и самостоятельное доказательство иррациональности выражения $\sqrt[n]{4}$. Иррациональность выражения $\sqrt[n]{2}$ доказывается аналогичным образом.

Предположим, что выражение $\sqrt[n]{4}$ равно рациональ-

ному числу. А любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$.

При этом возможны три случая:

1) $\frac{p}{q}$, где p и q — нечетные числа;

2) $\frac{p}{q_1}$, где p — нечетное число, а q_1 — четное число;

3) $\frac{p_1}{q}$, где p_1 — четное число, а q — нечетное число.

Четвертый случай, когда p и q являются четными числами, не рассматривается, так как после деления числителя и знаменателя дроби на наибольший общий четный делитель, четвертый случай сводится к одному из трех вышеперечисленных случаев. Разберем по порядку.

$$1) \quad \frac{p}{q} = \sqrt[n]{4} \tag{39}$$

или

$$\frac{p^n}{q^n} = 4 \tag{40}$$

или

$$p^n = 4q^n \tag{41}$$

В уравнении (41) левая часть представляет нечетное число по условию, а правая часть—четное число (так как произведение нечетного числа на четное в произведении дает четное число), что в действительности не может быть. Таким образом, уравнение (39) в этом случае не может иметь места.

$$2) \quad \frac{p}{q_1} = \sqrt[n]{4} \tag{42}$$

$$\frac{p^n}{q_1^n} = 4 \tag{43}$$

$$p^n = q_1^n \cdot 4 \tag{44}$$

В уравнении (44) левая часть представляет нечетное число по условию, а правая часть — четное число(так как произведение четного числа на четное в произведении дает четное число), что в действительности не может быть. Таким бразом, уравнение (42) в этом случае не может иметь места.

$$3) \quad \frac{p_1}{q} = \sqrt[n]{4} \tag{45}$$

Так как p_1 — четное число по условию, то при разложении его на простые числа-сомножители по крайней мере найдется хотя бы одна двойка (когда не одна двойка, а несколько — доказательство проводится аналогично), т. е.

$$p_1 = p \cdot 2, \tag{46}$$

где p — нечетное число. Уравнение (45) с учетом уравнения (46) запишется

$$\frac{2p}{q} = \sqrt[n]{4} \tag{47}$$

или

$$\frac{2^n \cdot p^n}{q^n} = 4, \tag{48}$$

$$\frac{2^n \cdot p^n}{q^n} = 2^2 \tag{49}$$

или

$$\frac{2^n \cdot p^n}{q^n \cdot 2^2} = 1 \tag{50}$$

Так как в уравнении (50) n — целое положительное число, большее 2 по условию, то после сокращения в левой части уравнения (50) имеем

$$\frac{2^{n-2} \cdot p^n}{q^n} = 1 \tag{51}$$

или

$$q^n = 2^{n-2} \cdot p^n \tag{52}$$

В уравнении (52) левая часть представляет нечетное число по условию, а правая часть — четное число (так как произведение нечетного числа на четное в произведении дает четное число), что в действительности не может быть. Таким образом, уравнение (45) в этом случае не может иметь места.

Три разобранных случая охватывают все возможные варианты изменения рационального числа $\frac{p}{q}$. Поскольку в любом возможном случае выражение $\sqrt[n]{4}$, представляющее собой действительное число, не может быть рациональным числом, следовательно, выражение $\sqrt[n]{4}$ является иррациональным числом.

В соответствии с уравнениями (37) и (38) и принципом 5 и выражения $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ и $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ также являются иррациональными.

Принцип 10.

Корень n степени, где n — целое положительное число, большее двух, извлекается нацело с уничтожением иррациональности из таких и только таких рациональных чисел, числители и знаменатели которых, будучи разложенными на простые числа и представленными в виде произведений этих простых чисел, имеют показатели степени простых чисел, кратные показателю корня, т. е. все показатели степени простых чисел, делящиеся на показатель корня n с получением в качестве частного целых положительных чисел. Если хотя бы у одного простого числа-сомножителя отношение показателя степени к показателю корня дает не целые числа, а дробные, то вследствие принципов 5 и 7 все значение корня n степени является иррациональным числом (см. принцип 8). В этом случае даже формально не удается освободиться от знака иррациональности.

Например,

$$\sqrt[4]{\frac{625}{20736}} = \sqrt[4]{\frac{5^4}{2^8 \cdot 3^4}} = \frac{5}{2^2 \cdot 3} = \frac{5}{12}.$$

Из этого примера видно, что показатели степени 4, 8 и 4, соответственно, выражений 5^4, 2^8 и 3^4, нацело, с получением целых чисел 1, 2, 1, делятся на показатель корня 4.

Принцип 11.

Корень n степени, где n — целое положительное число, большее двух, из выражений $\frac{4A}{B}$, $\frac{A}{B \cdot 4}$, $\frac{2A}{B}$, $\frac{A}{2B}$, где A и B — нечетные целые положительные числа, представляет собою иррациональное число.

Доказательство. Известно, что нечетные числа, разложенные на простые числа-сомножители, не имеют среди сомножителей двоек, так как в противном случае они были бы четными числами, вследствие того, что произведение любого целого числа, в том числе и нечетного, на 2 дает четное число, а по условию A и B — нечетные целые числа.

Итак, A и B при разложении не дают двоек-сомножителей, которые могли бы сократиться с двойкой выражения $\frac{A}{B \cdot 2^2}$ или двойке этого выражения придать показатель степени, кратный показателю корня n.

А так как выражение $\sqrt[n]{4}$ в соответствии с принципом 9 является иррациональным числом, то, следовательно, и выражение $\sqrt[n]{\frac{A}{B\cdot 4}}$ является иррациональным числом.

Аналогично доказывается иррациональность выражений

$$\sqrt[n]{\frac{4A}{B}},\ \sqrt[n]{\frac{A}{2B}}\ \text{и}\ \sqrt[n]{\frac{2A}{B}}$$

Принцип 11 является следствием принципов 8 и 10.

Ввиду важности выражений

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B\cdot 4}},\ \sqrt[n]{\frac{4A}{B}},\ \sqrt[n]{\frac{A}{2B}}\ \text{и}\ \sqrt[n]{\frac{2A}{B}}$$

для доказательства Великой теоремы Ферма приведем дополнительно отдельное доказательство иррациональности этих выражений, не связанное с другими принципами.

Предположим, что выражение $\sqrt[n]{\frac{b}{B\cdot 4}}$ равно рациональному числу. А любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{p}{q}$.

При этом возможны три случая:

1) $\frac{p}{q}$, где p и q — нечетные числа

2) $\frac{p}{q_1}$, где p — нечетное число, а q_1 — четное число

3) $\frac{p_1}{q}$, где p_1 — четное число, а q — нечетное число.

Четвертый случай, когда p и q являются четными числами, не рассматривается, так как после деления числителя и знаменателя дроби на наибольший общий четный делитель, четвертый случай сводится к одному из трех вышеперечисленных случаев.

Разберем по порядку каждый случай.

1) $$\frac{p}{q} = \sqrt[n]{\frac{A}{B\cdot 4}} \tag{53}$$

$$\frac{p^n}{q^n} = \frac{A}{B\cdot 4} \tag{54}$$

или

$$Aq^n = 4Bp^n \tag{55}$$

В уравнении (55) левая часть представляет нечетное число по условию, а правая часть — четное число (так как произведение нечетного числа на четное в произведении дает четное число), чего в действительности не может быть. Таким образом, уравнение (53) в этом случае не может иметь места.

$$2)\quad \frac{p}{q_1} = \sqrt[n]{\frac{A}{B\cdot 4}}, \tag{56}$$

$$\frac{p^n}{q^n} = \frac{A}{B\cdot 4} \tag{57}$$

Так как q_1 — четное число по условию, то при разложении его на простые числа-сомножители по крайней мере найдется хотя бы одна двойка (когда не одна двойка, а несколько — доказательство проводится аналогично).

тогда

$$q_1 = q\cdot 2, \tag{58}$$

где q — нечетное число. Уравнение (57) с учетом уравнения (58) запишется

$$\frac{p^n}{q^n\cdot 2^n} = \frac{A}{B\cdot 2^2}, \tag{59}$$

$$\frac{p^n\cdot 2^2}{q^n\cdot 2^n} = \frac{A}{B} \tag{60}$$

Так как $n>2$ по условию задачи, после сокращения в левой части уравнения (60) имеем

$$\frac{p^n}{q^n\cdot 2^{n-2}} = \frac{A}{B} \tag{61}$$

или

$$p^nB = 2^{n-2}\cdot q^n\cdot A \tag{62}$$

В уравнении (62) левая часть представляет собой нечетное число по условию, а правая часть—четное число (так как произведение нечетного числа на четное в произведении дает четное число), чего в действительности не может быть. Таким образом, уравнение (56) в этом случае не может иметь места.

$$3)\quad \frac{p_1}{q} = \sqrt[n]{\frac{A}{B\cdot 4}}, \tag{63}$$

$$\frac{p_1}{q^n} = \frac{A}{B\cdot 4} \tag{64}$$

или $$q^n \cdot A = 4Bp_1^n \qquad (65)$$

В уравнении (65) левая часть представляет нечетное число по условию, а правая часть — четное число, так как 4 — четное число и p_1 — четное число по условию. Этого в действительности не может быть. Таким образом, уравнение (63) в этом случае не может иметь места.

Три разнообразных случая охватывают все возможные варианты изменения рациональных чисел $\frac{p}{q}$. Поскольку в любом возможном случае выражение $\sqrt[n]{\frac{A}{B \cdot 4}}$, представляющее собой действительное число, не может быть рациональным числом, следовательно, выражение $\sqrt[n]{\frac{A}{B \cdot 4}}$ является иррациональным числом. Аналогичным образом доказывается иррациональность и выражений

$$\sqrt[n]{\frac{4A}{B}};\ \sqrt[n]{\frac{A}{2B}} \text{ и } \sqrt[n]{\frac{2A}{B}}. \qquad (66)$$

Принцип 12.

Если подкоренное выражение является иррациональным числом, то корень n степени, где n — целое положительное число, большее двух, из этого иррацинального числа представляет собой иррациональное число.

Доказательство. Пусть α — иррациональное число. Доказать, что выражение $\sqrt[n]{\alpha}$ — иррациональное число.

Предположим, что выражение $\sqrt[n]{\alpha}$ представляет собой рациональное число (66)

Значение α можно представить

$$\alpha = \left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n \qquad (67)$$

или

$$\alpha = \underbrace{\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\alpha} \ldots \sqrt[n]{\alpha}}_{\text{всего } n \text{ раз}}, \qquad (68)$$

Из предположения (66) и правой части уравнения (68) следует, что α, как произведение рациональных чисел, представляет собой рациональное число, а по условию задача α — иррациональное число. Обнаруженное проти-

воречие свидетельствует о том, что выражение $\sqrt[n]{a}$ является иррациональным числом.

Принцип 13.

В любом прямоугольном треугольнике гипотенуза не равна ни одному из катетов этого треугольника (см. рис. 2 и уравнения 5—8).

$$AB = \sqrt{C} = c \neq CB = \sqrt{A} = a \tag{69}$$

$$AB = \sqrt{C} = c \neq AC = \sqrt{B} = b \tag{70}$$

Принцип 14.

В уравнениях (3), (4) и (5)

$$C \neq A \tag{71}$$

$$C \neq B \tag{72}$$

Принцип 15. (?)

Если уравнение (4) хотя бы одно из выражений $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$, $\sqrt[n]{C}$ представляет собой иррациональное число, то при умножении всех членов этого уравнения на одно и то же любое действительное положительное число, нельзя освободить все выражения $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$ и $\sqrt[n]{C}$ от иррациональности. По крайней мере какое-либо одно выражение из них будет оставаться иррациональным.

Легко заметить, что принцип 15 является следствием принципов 10, 14, 5, 7, 8.

Принцип 16. (?)

Если в уравнении (5) хотя бы одно из выражений $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$ представляет собой иррациональное число, то при умножении всех членов этого уравнения на одно и то же любое действительное положительное число, нельзя освободить все выражения $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, и $\sqrt{C}$ от иррациональности. По крайней мере какое-либо одно выражение из них будет оставаться иррациональным. Нетрудно заметить, что принцип 16 является следствием принципов 10, 13, 14, 5, 7, 8.

Принцип 17. (?)

Если в прямоугольном треугольнике AFC (рис. 2) хотя бы одна из сторон a', b', c' представляет собой отрезок иррациональной величины, то и все прямоугольные треугольники, подобные треугольнику AFC, будут иметь по крайней мере одну из сторон иррациональной величины. Принцип 17 является прямым следствием принципа 16.

Принцип 18. (?)

Если в уравнении

$$(\sqrt[n]{A'})^n + (\sqrt[n]{B})^n = (\sqrt[n]{C'})^n, \tag{73}$$

соответствующем прямоугольному треугольнику AFC (рис. 2), хотя бы одно из выражений $\sqrt[n]{A'}$, $\sqrt[n]{B}$ и $\sqrt[n]{C'}$ представляет собою иррациональное число, то и для всех прямоугольных треугольников, подобных треугольнику AFC, в соответствующих им уравнениях по крайней мере одно из выражений типа $\sqrt[n]{A'}, \sqrt[n]{B}, \sqrt[n]{C'}$ будет оставаться иррациональным. Нетрудно заметить, что принцип 18 является следствием принципов 4 и 15.

Принцип 19.

Иррациональное число представить в виде одного из членов уравнения (2), например, в виде выражения a^n, где a_1 и n — целые положительные числа, нельзя.

Доказательство. Дано: выражение a_1^n — иррациональное число.

Если предположить, что в этом случае a_1 и n — целые положительные числа, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\text{всего } n \text{ раз}} \tag{74}$$

Из правой части уравнения (74) следует, что произведение целых положительных чисел представляет собой целое число, а по условию задачи выражение a_1^n — иррациональное число. Обнаруженное противоречие свидетельствует о том, что иррациональное число представить в виде выражения a_1^n с целыми значениями чисел a_1 и n нельзя.

Если n — целое положительное, а выражение a_1^n —

иррациональное число, то, как следует из принципа 12, значение a_1 должно быть иррациональным.

Принцип 20.

Величина катетов прямоугольного треугольника полностью определяет прямоугольный треугольник. Если исследованы прямоугольные треугольники, квадраты значений катетов которых охватывают всю совокупность целых положительных значений чисел от 1 до ∞, причем при каждом значении квадрата первого катета прямоугольного треугольника исследуется вся совокупность чисел от 1 до ∞ квадратов второго катета и наоборот, то, следовательно, тем самым исследуются все возможные случаи значения членов уравнения (3).

Принцип 21.

Как следует из геометрии (см. рис. 2), медиана, проведенная из вершины угла A прямоугольного треугольника ABC, делит катет CB пополам, т. е.

$$CF = FB = \frac{CB}{2} = \frac{\sqrt{A}}{2} \tag{75}$$

Принцип 22.

Из рис. 2 следует, что для уравнения (3), в котором в соответствии с принципом 2 A и B — нечетные целые положительные числа, можно вывести:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \tag{76}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{B}} \tag{77}$$

$$2\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \tag{78}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 2\operatorname{tg}\beta \tag{79}$$

$$\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) = \frac{A}{B} = \frac{4A'}{B} \tag{80}$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{A}{B \cdot 4} \tag{81}$$

$$\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) = 4\operatorname{tg}^2\beta = \frac{A}{B} \tag{82}$$

$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{A'}{B} = \frac{A}{B \cdot 4} \tag{83}$$

Каждому прямоугольному треугольнику ABC соответствует «псевдоподобный» прямоугольный треугольник AFC.

Если значения квадратов катетов A' и B прямоугольного треугольника AFC представляют собой целые положительные числа, то и значение квадратов катетов A и B «псевдоподобного» прямоугольного треугольника ABC также представляют целые положительные числа.

Принцип 23.

Из рис. 2 следует, что для уравнения (3), в котором в соответствии с принципом 1, например, A и C — нечетные целые положительные числа, можно вывести:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C}} \tag{84}$$

$$\sin\beta=\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{C'}}, \tag{85}$$

$$2\sin\beta=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{C'}} \tag{86}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{87}$$

$$\sin^2(\alpha+\beta)=\frac{A}{C}=\frac{4A'}{C} \tag{88}$$

$$\sin^2\beta=\frac{A}{C\cdot 4} \tag{89}$$

$$\sin^2(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta) \tag{90}$$

$$\sin^2\beta=\frac{A'}{C'}=\frac{A}{C\cdot 4} \tag{91}$$

Принцип 24

Если произведение двух взаимно простых целых чисел есть полный квадрат, то и каждое из этих чисел должно быть квадратом.

Например, если разложить число 36 на взаимно простые сомножители, то каждый из них (4·9) должен быть квадратом.

Принцип 25.

В соответствии с литературными данными [6] и принципами 1 и 24 уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad (92)$$

где x и y не могут быть одновременно нечетными числами, можно считать x — нечетным, y — четным и, следовательно, z — нечетным. Из уравнения (92) следует

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) \qquad (93)$$

Принимая

$$z = \frac{m + n}{2}$$

$$y = \frac{m - n}{2}$$

$x^2 = mn$, $m = u^2$, $n = v^2$, получаем

$$x = uv \qquad (94)$$

$$y = \frac{u^2 - v^2}{2} \qquad (95)$$

$$z = \frac{u^2 + v^2}{2} \qquad (96)$$

$$(uv)^2 + \left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + v^2}{2}\right)^2, \qquad (97)$$

где m и n — нечетные взаимно простые числа;

u и v — также нечетные взаимно простые числа, причем $u > v$.

Всю совокупность основных Пифагоровых чисел можно представить в виде членов уравнения (97).

Например, пусть $u = 11$, $v = 9$. Соответствующие Пифагоровы числа будут

$$uv = 99, \qquad \frac{u^2 - v^2}{2} = 20,$$

$$\frac{u^2 + v^2}{2} = 101,$$

$$99^2 + 20^2 = 101^2$$

Принцип 26.

Выражение $u^2 + v^2$, где u и v — нечетные взаимно простые числа, можно представить как целое положительное число вида $2 \cdot p$, где p — целое нечетное число.

Действительно, в соответствии с принципом 25 выражение $\frac{u^2 + v^2}{2}$ является нечетным целым Пифагоровым

числом уравнения (97). А выражение $\frac{u^2+v^2}{2}$ нечетным числом может быть только тогда, когда

$$u^2+u^2=2p \tag{98}$$

или

$$\frac{u^2+u^2}{2}=\frac{2p}{2}=p \tag{99}$$

Принцип 27.

Излагается сущность принципа индуктивности, такого принципа, который позволяет о свойствах рассматриваемого уравнения судить по свойствам другого аналогичного уравнения, «индуктивно» связанного с рассматриваемым уравнением. Геометрическая интерпретация принципа индуктивности приводится на рис. 3.

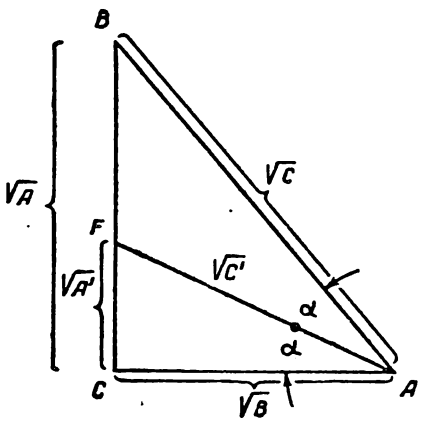


Рис. 3
Геометрическая интерпретация принципа индуктивности

Прямоугольный треугольник ABC индуктивно связан с прямоугольным треугольником ACF и наоборот, где AF— биссектриса угла BAC.

Пусть стороны прямоугольных треугольников ACB и ACF соответственно равны

$$CF=\sqrt{A'}=a' \tag{100}$$

$$CA=\sqrt{B}=b \tag{101}$$

$$AF = \sqrt{C'} = c' \tag{102}$$

$$AB = \sqrt{C} = c \tag{103}$$

$$CB = \sqrt{A} = a \tag{104}$$

Если значения величин b, c' и a' даны, то

$$\frac{a'}{a - a'} = \frac{b}{c}, \tag{105}$$

так как AF — биссектриса угла BAC,

или
$$a'c = b(a - a'). \tag{106}$$

Так как

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{107}$$

то уравнение (106) примет вид

$$a' \sqrt{a^2 + b^2} = b(a - a') \tag{108}$$

или

$$a'^2 (a^2 + b^2) = b^2 (a - a')^2 \tag{109}$$

Из уравнения (109) получаем

$$a = \frac{2b^2 a'}{b^2 - a'^2} \tag{110}$$

Из уравнений (107) и (110) получаем

$$c = \frac{b(b^2 + a'^2)}{b^2 - a'^2} \tag{111}$$

Если даны значения величин a, b и c, то из уравнения (106) получим

$$a'c = ba - ba' \tag{112}$$

Из уравнения (112) получаем

$$a' = \frac{ab}{b + c} \tag{113}$$

Так как

$$c'^2 = a'^2 + b^2 \tag{114}$$

то учитывая уравнение (113), получим

$$c'^2 = \frac{a^2 b^2}{(b + c)^2} + b^2 \tag{115}$$

Из уравнений (110), (111) и (113) следует

$$a^2 = \frac{4b^4 a'^2}{(b^2 - a'^2)^2} \tag{116}$$

$$c^2 = \frac{b^2 (b^2 + a'^2)^2}{(b^2 - a'^2)^2} \qquad (117)$$

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{(b + c)^2} \qquad (118)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ВЫВОДЫ

Приводим доказательство для двух возможных случаев уравнений (3), (4) и (5).

Первый случай, соответствующий принципу 2, и второй случай, соответствующий принципу 1.

В первом случае члены уравнения (3) путем деления их на общий наибольший делитель чисел A и B всегда можно привести к виду

$$\frac{A}{q} + \frac{B}{q} = \frac{C}{q}, \qquad (119)$$

где q — нечетный наибольший делитель чисел A и B.

Если из выражений $\frac{A}{q}$ и $\frac{B}{q}$ нацело до целых чисел извлекаются квадратные корни, то в соответствии с принципом 26 уравнение (119) можно заменить уравнением

$$u^2 + v^2 = 2p, \qquad (120)$$

где u и v — нечетные взаимно простые числа,

p — нечетное число.

Уравнение (120) можно представить следующим образом

$$(\sqrt[n]{u^2})^n + (\sqrt[n]{v^2})^n = (\sqrt[n]{2p})^n, \qquad (121)$$

где n — целое число, большее двух.

В соответствии с принципами 9—11 выражение $\sqrt[n]{2p}$ в правой части уравнения (121) представляет собой иррациональное число.

Принимая во внимание уравнения (2—4) и принципы 15, 17, 18, 19, уравнение (121) в данном случае можно представить только в виде неравенства

$$a_1^n + b_1^n \neq c_1^n, \qquad (122)$$

где a_1 и b_1 — целые нечетные положительные числа,

c_1 — целое четное положительное число,

n — целое положительное число, большее двух.

Как показала многолетняя работа, на основании вышеприведенных 27 принципов и соответственно 122 уравнений, привести общее доказательство второго случая, соответствующего принципу 1_n и первого для подслучая, когда из выражений $\frac{A}{q}$ и $\frac{B}{q}$ уравнения (119) нацело, до целых чисел, не извлекаются квадратные корни, не представляется возможным. Это свидетельствует о том, что общее направление доказательства, в основном ориентированное на возможности геометрии и тригонометрии, было выбрано неправильно.

Возможности геометрии и тригонометрии с частично привлеченным аппаратом арифметики, алгебры и теории чисел для решения конкретно поставленной задачи, доказательства теоремы Ферма, оказались весьма ограниченными. Они позволили решить только весьма небольшой по объему частный случай Великой теоремы Ферма.

Спрашивается, с точки зрения методологического подхода, не напрасно ли проделана большая предварительная работа по представлению условий задачи и попыток ее решения в наглядном геометрическом виде, лишь с частичным привлечением аппарата арифметики, алгебры и теории чисел? Правильно ли была сделана ориентировка в основном на аппарате геометрии и тригонометрии, при которой аппарат арифметики и алгебры выполнял вспомогательную роль? Может быть, целесообразнее было бы сразу же ориентироваться в основе решения на аппарат арифметики и алгебры и решать в таком главном направлении поставленную проблему.

При такой ситуации из истории математики невольно вспоминается недовольство, которое Декарт проявлял в отношении евклидовой геометрии, называя ее «упражнением в осмысливании при непременном условии величайшего утомления воображения».

Уже Рене Декарт и Пьер де Ферма знали, что синтетические евклидовы методы слишком ограничены, чтобы с их помощью решать ряд специфических трудных задач.

Однако, принимая во внимание все вышеизложенное, следует ответить на поставленный вопрос отрицательно. Нет, не напрасно были использованы возможности геометрии и тригонометрии, особенно наглядность последних. Эти возможности хотя и оказались весьма ограниченными, но в неоценимой мере полезными для решения

конкретно поставленной задачи доказательства Великой теоремы Ферма. Они позволили найти основную идею доказательства, логический закон противоречия через принцип иррациональности, и подтвердить плодотворность этой идеи при частичном решении проблемы. А это, по сути дела, и составляет основу первоначального поиска. Теперь, проделав большую работу и «завоевав» небольшой «плацдарм» и отталкиваясь уже не от нуля как первоначально, а от «завоеванного плацдарма» — проверенной идеи доказательства, можно объективно оценить возможности элементарной геометрии с тригонометрией и при дальнейшем продвижении в решении задачи, если оказывается целесообразным для ее окончательного решения, сделать «поворот на 180°» и ориентироваться, в основном, на возможности алгебры и арифметики.

Только с методологической точки зрения сочли целесообразным поместить в работе все разобранные и доказанные выше 27 принципов, хотя многие из этих принципов к доказательству теоремы Ферма не имеют прямого отношения. Они имеют лишь косвенное отношение: явились причиной возникновения и проверки основной идеи доказательства — использования через принцип иррациональности логического закона противоречия.

Для продолжения работы над доказательством теоремы Ферма введем дополнительные принципы.

Принцип 28

Если $$a_1 = uv \tag{123}$$

и $$v > u, \tag{124}$$

где a_1 — любое целое нечетное составное число, а u и v — любые нечетные взаимно простые числа, то

$$a_1^n = u^n v^n \tag{125}$$

или $$a_1^n = u_1 v_1,$$

где $$u_1 = u^n, \quad v_1 = v^n,$$

n — целое положительное число, большее двух, u_1 и v_1 — нечетные взаимно простые числа.

Принцип 29

Если выражение вида $v_1^n - u_1^n$, где $v_1 > u_1$, v_1 и u_1 — любые целые положительные числа, а n — целое четное

положительное число, большее двух, нельзя представить в виде квадрата любого целого числа, то это выражение нельзя представить никаким другим целым числом в степени n.

Доказательство этого принципа проводим от противного. Предположим, что

$$v_1^n - u_1^n = k_1^n \qquad (126)$$

где v_1, u_1 и k_1 — любые целые положительные числа,

n— целое четное положительное число, большее двух. Поскольку n — четное число, большее двух, то значение k_1^n правой части уравнения (126) можно представить

$$k_1^n = \left(k_1^{\frac{n}{2}}\right)^2 \qquad (127)$$

где $\frac{n}{2}$ — целое положительное число.

Так как k_1 и $\frac{n}{2}$ — целые положительные числа, то выражение $k_1^{\frac{n}{2}}$ также должно быть каким-то целым положительным числом c_1, т. е.

$$k_1^{\frac{n}{2}} = c_1 \qquad (128)$$

Тогда уравнение (127) преобразуется в уравнение

$$k_1^n = c_1^2, \qquad (129)$$

а уравнение (126) — соответственно в уравнение

$$v_1^n - u_1^n = c_1^2 \qquad (130)$$

Уравнение (130) противоречит условию принципа, следовательно, предположение, что уравнение (126) имеет место, сделано неправильно. Таким образом, должно иметь место неравенство

$$v_1^n - u_1^n \neq k_1^n, \qquad (131)$$

что и требовалось доказать.

Принцип 30

Если выражение вида $v_1^n - u_1^n$, где $v_1 > u_1$, v_1 и u_1 — любые целые положительные числа, а n — целое положи-

тельное число, большее двух, нельзя представить в виде степени $\sqrt[k]{\ }^{n}$ любого целого числа, где $\frac{n}{k}$ и k — целые положительные числа, то это выражение нельзя представить никаким другим целым числом в степени n.

Доказательство принципа 30 аналогично доказательству принципа 29. Не представляет большого труда заметить, что принцип 29 является частным случаем принципа 30.

Продолжение доказательства Великой теоремы Ферма

Доказательство проводим от противного.

Пусть уравнение (2) имеет место

$$a_1^n + b_1^n = c_1^n \tag{2}$$

Представим уравнение (2) в виде

$$b_1^n = c_1^n - a_1^n \tag{132}$$

и

$$c_1^n - b_1^n = a_1^n, \tag{133}$$

где b_1 — четное целое положительное число,

a_1 и c_1 — нечетные взаимно простые числа, и, кроме того, пусть a_1 — целое нечетное составное число.

Тогда в соответствии с принципом 28 уравнение (133) представим

$$c_1^n - b_1^n = a_1^n = v^n u^n, \tag{134}$$

где $v > u$, v и u — любые взаимно простые нечетные числа.

Уравнение (134) преобразуется в уравнения (135) и (136),

$$\left(\sqrt{c_1^n}\right)^2 - \left(\sqrt{b_1^n}\right)^2 = a_1^n = v^n u^n \tag{135}$$

$$\left(\sqrt{c_1^n} - \sqrt{b_1^n}\right)\left(\sqrt{c_1^n} + \sqrt{b_1^n}\right) = v^n u^n \tag{136}$$

Чтобы не только значение a_1, но и значения c_1 и b_1 уравнения (2) выразить через значения v и u, дополнительно к уравнению (136), как известно, необходимо и достаточно составить еще два уравнения. Так как v и u представляют собой любые взаимно простые нечетные числа, то в соответствии с принципом 28 для замены зна-

чений c_1 и b_1 через v и u, соблюдая справедливость уравнения (136), можно записать,* что

$$\sqrt{c_1^n} + \sqrt{b_1^n} = v^n \qquad (137)$$

$$\sqrt{c_1^n} - \sqrt{b_1^n} = u^n \qquad (138)$$

Складывая уравнения (137) и (138), находим

$$2\sqrt{c_1^n} = v^n + u^n \qquad (139)$$

Вычитая из уравнения (137) уравнение (138), находим

$$2\sqrt{b_1^n} = v^n - u^n \qquad (140)$$

Сравнивая уравнение (140) с уравнением (132), видим, что уравнение (140) аналогично уравнению (132), так как правые части этих уравнений состоят из разностей n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел. Разница между уравнениями (140) и (132) состоит только в том, что, вообще, уравнение (140) является более общим, так как значения v и u в этом уравнении могут быть любыми взаимно простыми числами по условию (см. уравнение (134) и принцип (28), в том числе и нечетными взаимно простыми числами уравнения (132), т. е. c_1 и a_1.

---

* Разложение уравнения (136) производится в соответствии с настоящим принципом 31: разложением уравнения $C-B=A$ или $(\sqrt{C}+\sqrt{B})(\sqrt{C}-\sqrt{B}) = A = V \cdot U$ на уравнения $\sqrt{C}+\sqrt{B} = V$; $\sqrt{C}-\sqrt{B}=U$ и принципами 24 и 25. Принцип 31 является более общим случаем разложения уравнения по сравнению с широко известным разложением (в соответствии с принципами 1, 24, 25) уравнения $C_1^2 - B_1^2 = A_1^2$ или $(C_1+B_1)(C_1-B_1) = A_1^2 = U_1^2 V_1^2$ на уравнения: $C_1+B_1=V_1^2$; $C_1-B_1=U_1^2$.

Обозначения и условия: A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно — взаимно простые целые положительные числа; $\sqrt{C} = \frac{V+U}{2}$; $\sqrt{B} = \frac{V-U}{2}$; $C_1 = \frac{V_1^2+U_1^2}{2}$; $B = \frac{V_1^2-U_1^2}{2}$, V, U и V_1, U_1 соответственно—нечетные взаимно простые числа; $V>U$; $V_1>U_1$.

Доказательство принципа 31 аналогично известным доказательствам принципов 24 и 25. Нетрудно заметить, что принципы 24 и 25 являются частными случаями принципа 31.

Разложение уравнения (136) с четными показателями степени n производится в соответствии с принципами 31 и 25, а с нечетными показателями степени n — в соответствии только с принципом 31.

Разберем уравнение (140). При этом возможно рассмотрение двух случаев:

1) когда n — четное целое положительное число, большее двух;

2) когда n — нечетное целое положительное число, большее двух.

Итак, разберем **первый случай**.

Уравнение (140) можно представить

$$2b^{\frac{n}{2}} = v^n - u^n, \tag{141}$$

или

$$\left(\sqrt[\frac{n}{2}]{2}\right)^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} = v^n - u^n, \tag{142}$$

или

$$\left(\sqrt[\frac{n}{2}]{2}\, b\right)^{\frac{n}{2}} = v^n - u^n \tag{143}$$

где $\frac{n}{2}$ — целое положительное число, так как n — четное целое положительное число, большее двух.

В уравнении (143) выражение $(\sqrt[\frac{n}{2}]{2}\, b)$ в соответствии с принципом 5 является иррациональным выражением, так как выражение $\sqrt[\frac{n}{2}]{2}$ в соответствии с принципом 9 иррационально, а b — целое положительное число по условию (см. уравнение (2)). Принимая во внимание уравнения (2—4) и принципы 15, 17, 18, 19, и 30, уравнение (143) нельзя представить в виде уравнения (144)

$$p^n = v^n - u^n, \tag{144}$$

а можно представить в виде неравенства

$$p^n \neq v^n - u^n, \tag{145}$$

где p — целое положительное число.

Сравнивая уравнение (132) и неравенство (145), в которых правые части аналогичны и состоят из разности n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел, обнаруживаем возникшее противоречие: в одном месте разность n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел можно

представить как целое положительное число n-ой степени (уравнение (132)), а в другом месте разность n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел нельзя представить как целое положительное число n-ой степени (неравенство (145)). Следовательно, когда n — четное целое положительное число, большее двух, предположение, что уравнение (2) или (132) имеет место, сделано неправильно. Вместо него имеет место неравенство

$$a_1^n + b_1^n \neq c_1^n, \tag{146}$$

где a_1 и c_1 — целые нечетные положительные числа,

b_1 — целое четное положительное число,

n — целое четное положительное число, большее двух.

Разберем **второй случай**, когда

n — нечетное целое положительное число, большее двух.

И для этого случая рассмотрим уравнение

$$2\sqrt{b_1^n} = v^n - u^n \tag{140}$$

Так как правая часть уравнения (140) всегда представляет собой целое четное положительное число (вследствие того, что v и u — целые нечетные взаимно простые числа и $u > v$ по условию), то и выражение $\sqrt{b_1^n}$, равное, $\frac{v^n - u^n}{2}$ представляет собой целое положительное число

$$\sqrt{b_1^n} = \frac{v^n - u^n}{2} \tag{147}$$

А это возможно лишь тогда, когда выражение b_1^n можно представить в виде выражения $(k^{2p})^n$, из которого извлекается квадратный корень, т. е.

$$k^{2p} = b_1 \tag{148}$$

где k — целое положительное число,

$2p$ — четное целое положительное число,

p — целое положительное число.

Уравнение (148) можно преобразовать

$$k^{2p} = b_1 = (k^p)^2 = d^2, \tag{149}$$

где

$$d = k^p, \tag{150}$$

d — целое положительное число.

Учитывая уравнение (149), уравнение (140) можно представить

$$2\sqrt[n]{d^{2n}} = v^n - u^n \tag{151}$$

или

$$2d^n = v^n - u^n \tag{152}$$

или

$$(\sqrt[n]{2}\,d)^n = v^n - u^n, \tag{153}$$

В левой части уравнения (153) выражение $\sqrt[n]{2}\,d$ в соответствии с принципом 5 является иррациональным выражением, так как выражение $\sqrt[n]{2}$ в соответствии с принципом 9 иррационально, а d — целое положительное число по условию (см. уравнения (149) и (150)).

Принимая во внимание уравнения (2—4) и принципы 15, 17, 18, 19, уравнения (153) нельзя представить в виде уравнения (154)

$$p^n = v^n - u^n, \tag{154}$$

а можно представить только в виде неравенства,

$$p^n \neq v^n - u^n, \tag{155}$$

где p — целое положительное число.

Сравнивая уравнение (132) и неравенство (155), в которых правые части аналогичны и состоят из разности n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел, обнаруживаем возникшее противоречие: в одном месте разность n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел можно представить как целое положительное число n-ой степени (уравнение (132)), а в другом месте разность n-ых степеней нечетных взаимно простых чисел нельзя представить как целое положительное число n-ой степени (неравенство (155)). Следовательно, и когда n — нечетное целое положительное число, большее двух, предположение, что уравнение (2) или (132) имеет место, сделано неправильно. Вместо него имеет место неравенство

$$a_1^n + b_1^n \neq c_1^n, \tag{156}$$

где a_1 и c_1 — целые нечетные положительные числа,

b_1 — целое четное положительное число,

n — нечетное целое положительное число, большее двух.

Подведем общий итог доказанному. В соответствии с классификацией разделения доказательства Великой теоремы Ферма на различные случаи, указанные на стр. 34 настоящей работы, полностью доказан второй случай, соответствующий принципу 1, и частично — первый случай, соответствующий принципу 2.

Напомним, что для первого случая, соответствующего принципу 2, уравнение (2) запишется в виде

$$a_1^n + b_1^n = c_1^n, \qquad (157)$$

где a_1 и b_1 — целые нечетные положительные числа,

c_1 — целое четное положительное число,

n — целое положительное число, большее двух.

Первый случай доказывается аналогично доказательству второго случая, представленному в уравнениях (132—156). На основании уравнения (157) аналогично выводу уравнений (139) и (140) на основании уравнения (133), выводятся два уравнения, соответствующие уравнениям (139) и (140).

В дальнейшем вывод отличается лишь тем, что аналогично второму случаю подробно разбирается уравнение, соответствующее не уравнению (139), как во втором случае, а уравнению (139).

В конечном счете, совершенно аналогично доказывается, что

$$a_1^n + b_1^n \neq c_1^n, \qquad (158)$$

где a_1 и b_1 — целые нечетные положительные числа,

c_1 — целое четное положительное число,

n — целые, как четные, так и нечетные положительные числа, большие двух.

Из изложенного видно, что доказательство Великой теоремы Ферма в общем виде основывается на использовании одного из основных законов мышления — закона противоречия.

ВЫВОДЫ

1. Предложена общая схема методологического подхода к решению сложных задач, проблем.

2. Эффективность предложенной методологической схемы иллюстрируется на примере доказательства Великой теоремы Ферма.

3. Впервые доказана Великая теорема Ферма в общем виде:

$$a^n + b^n \neq c^n,$$

a, b, c — целые положительные числа,

n — целое положительное число, большее двух.

4. Доказательство Великой теоремы Ферма в общем виде основывается на использовании одного из основных законов мышления — закона противоречия.

5. Приведенное доказательство Великой теоремы Ферма наряду с огромным богатством накопленных математических знаний дополнительно подтверждает, что широко используемый в математике логический закон мышления — закон противоречия — остается одним из фундаментальных законов математики, возможности которого еще далеко не исчерпаны при разрешении нерешенных на сегодняшний день сложных задач, проблем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак сменилось 13 поколений людей, а Великая теорема Ферма оставалась еще не доказанной. Только в настоящей работе впервые приводится полное доказательство этой теоремы в общем виде.

Спрашивается, является ли настоящее доказательство единственно возможным?

Безусловно, нет! Возможны и другие варианты доказательств. Например, в прямоугольном треугольнике ABC (рис. 3) не обязательно проводить биссектрису. Можно провести и другую прямую линию определенным образом. Возможны и совершенно другие принципиальные подходы к решению теоремы Ферма.

В настоящей книге приводится первый вариант доказательства Великой теоремы Ферма, найденный автором при работе над теоремой в соответствии с методикой познания «истины», сущность которой изложена в первой главе. Однако, основной принцип иррациональности, заложенный в доказательство теоремы, по-видимому, будет оставаться общим для всех возможных вариантов решения. И принципы, изложенные в разделе «Исходные положения и принципы», по-видимому, также являются исчерпывающим основанием «фундаментом» для всех возможных иных решений Великой теоремы Ферма. Предлагаем читателям самим найти эти решения.

Когда автор самостоятельно доказал теорему Пифагора своим оригинальным методом, то испытал большую творческую радость и, главное, уверенность в своих силах (что часто нам не достает при решении сложных задач и проблем), хотя к этому времени было известно множество других вариантов доказательств этой «знаменитой», фундаментальной теоремы, изложенных в литературе (например, в книге известного немецкого математика Вальтера Литцмана «Теорема Пифагора») [6]. Теорема Пифагора является «знаменитой» потому, что благодаря этой теореме люди пришли к понятию иррациональных

чисел и значительно расширили свое мировоззрение о мире чисел и величин измерения. И в настоящей работе не обойдена стороной эта «знаменитая» теорема Пифагора.

К доказательству Великой теоремы Ферма возможен и оригинальный подход, принцип, изобретенный и использованный неоднократно самим Ферма и названный методом «бесконечного спуска», сущность которого изложена в книге известного советского математика А. Я. Хинчина «Великая теорема Ферма» [7].

Однако принципы 4, 15, 17 и 18, изложенные в разделе «Исходные положения и принципы», по-видимому, в значительной степени охватывают и принцип «бесконечного спуска» Ферма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е. Раудсеп,* Метод усиления творческой отдачи коллектива «Синектик», Перевод № 13861, Гипрокаучук, М. 1972; Г. С. *Альтшуллер,* Алгоритм изобретения, Изд-во «Московский рабочий», 1973 г.; НТТМ: проблемы и поиски. Журнал «Техника молодежи», 1973, № 3, стр. 2; *Вадим Орлов,* Фейерверк открытий. Журнал «Техника молодежи», 1973, № 3, стр. 4—6; *Д. И. Блохинцев.* Открыть новое в старом. Журнал «Техника молодежи»; 1973, № 5, стр. 16—17 *Игорь Романов.* Мосты, перекинутые фантазией. Журнал «Техника молодежи», 1974 г., № 1, стр. 22—23; *Б. М. Кедров.* Бегство от привычного. Журнал «Техника молодежи», 1973 г., № 6, стр. 25—27; *Н. Белов.* Сколько стоит мысль? Журнал «Техника молодежи», 1973 г., № 2, стр. 16—17; *Н. Синев,* Я всегда стремился ставить работу конструктора на научную основу. Журнал «Техника молодежи», 1973 г., № 4, стр. 34—35; *Здравко Дунов,* В лабиринтах мысли и воображения. Журнал «Техника молодежи», 1973 г., № 7, стр. 26—27; *Д. Плетнев* Путь к открытию. Журнал «Техника молодежи», 1973 г., № 12, стр. 12—13.

2. *Эрик Роджерс.* Физика для любознательных. Перевод с восьмого американского издания под общей редакцией академика Л. А. Арцимовича. Изд-во «Мир», М., 1973 г.

3. *Жак Адамар,* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. Перевод с французского под редакцией И. Б. Погребысского, Изд-во «Советское радио», М., 1970.

4. *Г. Г. Майоров,* Теоретическая философия Готфрида В. Лейбница. Изд-во Моск. университета, 1973 г.

5. У истоков классической науки, Сборник статей под редакцией А. Н. Боголюбова, Изд-во «Наука», М., 1968, стр. 183—185.

6. *Вальтер Литцман,* Теорема Пифагора, Перевод с немецкого В. С. Бермана; под редакцией И. М. Яглома, Гос. изд-во физико-матем. литературы, М., 1960. стр. 82—89.

7. *А. Я. Хинчин,* Великая теорема Ферма, ОНТИ, Гос. технико-теоретич. изд-во, М., 1934. Л.

8. *Айвен Нивен,* Числа рациональные и иррациональные, Перевод с английского В. В. Сахонова; под редакцией И. М. Яглом, Изд-во «Мир», М., 1966, стр. 72—76.

9. *Г. Корн* и *Т. Корн,* Справочник по математике для научных работников и инженеров, Перевод со второго американского переработанного издания, под общей редакцией И. Г. Арамановича, Изд-во «Наука», М., 1974, стр. 28.

СОДЕРЖАНИЕ

От автора 2

Глава первая. Методика познания «истины»

Глава вторая. Доказательство Великой теоремы Ферма

Введение 10
Исходные положения и принципы 11
Доказательство и выводы 34
Заключение 45
Литература 47

Будкин Виктолий Иванович

Методика познания «истины»

Доказательство великой теоремы Ферма

Редактор А. Кузнецов
Художественный редактор Д. Поздняков
Технический редактор Э. Патрикеева
Корректор Н. Кагитина

Сдано в набор 20 мая 1975 г. Подписано в печать 10 июля 1975 г. АК 09272 Формат 84×108/32. Бумага тип. № 1. Усл. печ. л. 2,52. Уч.-изд. л. 2,16. Заказ 1617. Тираж 5000 Цена 14 коп.

Верхне-Волжское книжное издательство Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ярославль, Трефолева, 12.

Типография № 2 Росглавполиграфпрома, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8.